

DOS PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE PARA PROCESOS DE POISSON NO HOMOGÉNEOS

TWO GOODNESS OF FIT TESTS FOR NON HOMOGENEOUS POISSON PROCESSES

Lucas López-Segovia¹, José A. Villaseñor-Alva² y Humberto Vaquera-Huerta²

¹Área de Estadística. DACB. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. Cunduacan, Tabasco. (llopez@ujat.mx). ²Especialidad en Estadística. Instituto de Socioeconomía Estadística e Informática. Colegio de Postgraduados. 56230, Montecillo, Estado de México. (jvillasr@colpos.colpos.mx)

RESUMEN

Este trabajo está dirigido al análisis estadístico del número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo $[0, T]$. Se supone que el número de eventos en $[0, T]$ es un Proceso de Poisson No Homogéneo (PPNH) $\{N_t\}_{t \geq 0}$, con función de valor medio (fvm) $\Lambda(t)$. La metodología se desarrolla condicionando, respecto a $N_T = n$, con tiempos de arribos $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < T$. Se propone un método para probar la hipótesis $H_0: \Lambda(t) = \Lambda^*(t)$ vs $H_1: \Lambda(t) \neq \Lambda^*(t)$, para $\Lambda^*(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$ y $\Lambda^*(t) = \exp(\beta_2 t^{\alpha_2}) - 1$, el cual consiste en la linealización de la fvm $\Lambda^*(t)$ y el uso del coeficiente de correlación muestral r para medir la linealidad resultante. Se construyen las tablas de la distribución de r bajo H_0 , para probar la bondad del ajuste de los modelos $\Lambda^*(t)$ considerados. El análisis incluye un estudio de simulación para el tamaño y potencia de las pruebas propuestas. Se observa que a mayor ocurrencia de eventos en $[0, T]$, se obtiene mayor potencia de las pruebas.

Palabras clave: Función de intensidad, función de valor medio, proceso de Poisson no homogéneo, proceso exponencial, proceso Weibull.

INTRODUCCIÓN

En la actividad diaria es común observar series de eventos que ocurren aleatoriamente en el tiempo, éstos pueden ser: tiempos de fallas en una máquina, tiempos de llegadas de vehículos a un punto sobre una carretera, tiempos de ocurrencia de accidentes en una mina. Los Procesos de Poisson No Homogéneos (PPNH) proporcionan modelos para el análisis estadístico del número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo $[0, T]$. El estudio de los PPNH tiene sus orígenes en el análisis de series de eventos completamente aleatorios o Procesos de Poisson Homogéneos (PPH), definidos formalmente a continuación.

Definición 1. Sea N_t la variable aleatoria que denota el número total de eventos ocurridos hasta el tiempo t . El proceso de conteo $\{N_t\}_{t \geq 0}$ es un PPH con intensidad $\lambda > 0$, si

Recibido: Junio, 2001. Aprobado: Agosto, 2002.

Publicado como ENSAYO en *Agrociencia* 36: 703-712. 2002.

ABSTRACT

This paper deals with the statistical analysis of the number of events that occur in the time interval $[0, T]$. It is assumed that the number of events in $[0, T]$ is a Non-Homogeneous Poisson Process (NHPP) $\{N_t\}_{t \geq 0}$, with mean value function (mvf) $\Lambda(t)$. Conditioning on $N_T = n$, the methodology is developed in terms of the arrival times $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < T$. A method is proposed to test the hypothesis $H_0: \Lambda(t) = \Lambda^*(t)$ versus $H_1: \Lambda(t) \neq \Lambda^*(t)$, for $\Lambda^*(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$ and, $\Lambda^*(t) = \exp(\beta_2 t^{\alpha_2}) - 1$, which consists in linealizing of the mvf $\Lambda^*(t)$ and using the sample correlation coefficient r to assess the degree of lineality obtained. Tables for the distribution function of r under H_0 are constructed via simulation in order to perform goodness of fit tests of the models $\Lambda^*(t)$ considered. The analyses include a simulation study for the size and power of the proposed test. We observed a major occurrence of events in $[0, T]$, we obtain tests of major power.

Key words: Intensity function, mean value function, non-homogeneous Poisson process, exponential process, Weibull process.

INTRODUCTION

In daily life, it is common to observe series of events that occur randomly in time, for example, failure times in a machine, arrival of vehicles at a point on a highway, or accidents in a mine. Non-Homogeneous Poisson Processes (NHPP) provide models for the statistical analysis of the number of events that occur within a time interval $[0, T]$. The study of NHPP has its origins in the analysis of a series of completely random events or Homogeneous Poisson Process (HPPs), defined formally as follows.

Definition 1. Let N_t be the random variable that denotes the total number of events that occur up to time t . The counting process $\{N_t\}_{t \geq 0}$ is a Homogeneous Poisson Process (HPP) with an intensity of $\lambda > 0$, if

- 1) $N_0 = 0$, if there are no events occurring at time $t = 0$.
- 2) $\{N_t\}_{t \geq 0}$ has independent increments, that is, for any $T_1 < T_2 < \dots < T_n$, the random variables $N_{T_2} - N_{T_1}$, $N_{T_3} - N_{T_2}, \dots, N_{T_n} - N_{T_{n-1}}$ are independent.

- 1) $N_0=0$, cuando no ocurren eventos al tiempo $t=0$.
- 2) $\{N_t\}_{t \geq 0}$ tiene incrementos independientes, es decir, para cualquier $T_1 < T_2 < \dots < T_n$, las variables aleatorias $N_{T_2} - N_{T_1}, N_{T_3} - N_{T_2}, \dots, N_{T_n} - N_{T_{n-1}}$ son independientes.
- 3) Para $0 \leq s < t$, $(N_{t+s} - N_s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$. La variable aleatoria $N_{t+s+h} - N_{s+h}$ tiene la misma distribución que la variable aleatoria $N_{t+s} - N_s$, para toda $h > 0$; es decir, el proceso tiene incrementos estacionarios.

Definición 2. Si un proceso contador $\{N_t\}_{t \geq 0}$ satisface las condiciones 1 y 2 de la Definición 1, y además 3': para $t > 0$, $N_t \sim \text{Poisson}(\Lambda(t))$, entonces $\{N_t\}_{t \geq 0}$ es un PPNH.

De la Definición 1 se sigue que en un PPH, $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$. Es decir, el número total de eventos N_T en un intervalo de tiempo $(0, T]$, tiene distribución Poisson con media λT .

Definición 3. Sea $\{N_t\}_{t \geq 0}$ un proceso contador. La función de valor medio (fvm) del proceso se define por $\Lambda(t) = E[N_t]$, y su función de intensidad está dada por la derivada de $\Lambda(t)$, $\lambda(t) = \Lambda'(t)$.

De la definición 3 se deduce que un PPH tiene como función de valor medio $\Lambda(t) = \lambda t$ y función de intensidad $\lambda(t) = \lambda$.

Los primeros análisis relacionados con series de eventos tratan de pruebas estadísticas de hipótesis de la intensidad de ocurrencias $\lambda(t)$, diseñadas para distinguir si una serie de eventos se deben a un PPH o a un PPNH. Una de las primeras pruebas propuestas es atribuida a Laplace, la cual sirve para contrastar el juego de hipótesis " $\lambda(t)$ es constante" versus " $\lambda(t)$ es creciente". Esta prueba supone que se tiene un PPNH observable en $[0, T]$, con intensidad $\lambda(t)$; y un número total de eventos $N_T = n$, con tiempos de arribo $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < T$.

La prueba se basa en la estadística $L = \sum_{i=1}^n \frac{T_i}{T}$, con

región de rechazo dada por $L > \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{12} Z_{1-\alpha^*}}$, donde

$Z_{1-\alpha^*}$ es el $1-\alpha^*$ ésimo cuantil de la $N(0,1)$. Cox (1955) discute el uso de esta prueba para probar $\beta=0$ versus $\beta>0$, cuando $\lambda(t) = \lambda \exp(\beta t)$. Crow (1974) la adaptó para probar

$\beta=1$ versus $\beta>1$ cuando $\lambda(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1}$, $\theta > 0$. Esta

prueba se basa en la estadística $Z = 2 \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{T}{T_i}\right)$, con

región de rechazo dada por $Z < \chi_{2n, \alpha^*}^2$ para una prueba de tamaño α^* .

- 3) For $0 \leq s < t$, $(N_{t+s} - N_s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$. The random variable $N_{t+s+h} - N_{s+h}$ has the same distribution as the random variable $N_{t+s} - N_s$, for all $h > 0$; that is, the process has stationary increments.

Definition 2. If a counting process $\{N_t\}_{t \geq 0}$ satisfies conditions 1 and 2 of Definition 1, and besides 3': for $t > 0$, $N_t \sim \text{Poisson}(\Lambda(t))$, then $\{N_t\}_{t \geq 0}$ is a NHPP.

From Definition 1, it follows that in a HPP, $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$. That is, the total number of events N_T in an interval of time $(0, T]$ has a Poisson distribution with mean λT .

Definition 3. Let $\{N_t\}_{t \geq 0}$ be a counting process. The mean value function (mvf) of the process is defined as $\Lambda(t) = E[N_t]$, and its intensity function is given by the derivative of $\Lambda(t)$, $\lambda(t) = \Lambda'(t)$.

From Definition 3, it is deduced that a HPP has as its mean value function $\Lambda(t) = \lambda t$, and its intensity function is $\lambda(t) = \lambda$.

The first analyses related to series of events have to do with statistical tests of hypotheses of the intensity of occurrence, $\lambda(t)$, designed to distinguish whether a series of events are due to a HPP or a NHPP. One of the first tests proposed is attributed to Laplace, and allows to contrast the set of hypothesis " $\lambda(t)$ is constant" versus " $\lambda(t)$ is increasing". It assumes an observable NHPP in $[0, T]$, with an intensity $\lambda(t)$ of and a total of $N_T = n$ events, with arrival times $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < T$.

The test is based on the statistic $L = \sum_{i=1}^n \frac{T_i}{T}$, with a

rejection region given by $L > \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{12} Z_{1-\alpha^*}}$, where

$Z_{1-\alpha^*}$ is the $1-\alpha^*$ th quantile of $N(0,1)$. Cox (1955) discusses the use of this test to contrast $\beta=0$ versus $\beta>0$, when $\lambda(t) = \lambda \exp(\beta t)$. Crow (1974) adapted it to test $\beta=1$

versus $\beta>1$ when $\lambda(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1}$, $\theta > 0$. This test is

based on the statistic $Z = 2 \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{T}{T_i}\right)$, with a

rejection region given by $Z < \chi_{2n, \alpha^*}^2$ for an α^* size test.

The above parametric tests are derived from the generalized likelihood ratio and, applying theorem 3 of Lehmann (1959), it can be demonstrated that they are uniformly most powerful (UMP) and unbiased. For the test of a more general intensity $\lambda(t) = \alpha \beta t^{\alpha-1} \exp(\beta t^\alpha)$, with $\alpha > 0, \beta > 0$, the likelihood function has the form

Las pruebas paramétricas anteriores se derivan de la razón de verosimilitud generalizada, y aplicando el teorema 3 de Lehmann (1959, p. 136), se puede demostrar que son uniformemente más potentes (UMP) e insesgadas. Sin embargo, para la prueba de una intensidad más general $\lambda(t)=\alpha\beta t^{\alpha-1}\exp(\beta t^\alpha)$, con $\alpha>0, \beta>0$; la función de verosimilitud tiene la forma:

$$f(T_1, T_2, \dots, T_n | n) = n! \left[\frac{\alpha\beta}{\exp(\beta T^\alpha) - 1} \right]^{n-1} \left[\frac{1}{\prod_{i=1}^n T_i} \right] \exp\left(\alpha \sum_{i=1}^n \log(T_i) + \beta \sum_{i=1}^n T_i^\alpha\right),$$

por lo que las ideas de Cox (1955) y Crow (1974) no son aplicables para $\alpha>0$ y $\beta>0$. Por otro lado, si la hipótesis nula se rechaza en la prueba de Laplace, se concluye que la intensidad es creciente, lo cual no proporciona suficiente información sobre el tipo de intensidad, ya que hay una infinidad de intensidades crecientes.

A continuación se diseña una prueba estadística para un PPNH, bajo las suposiciones de Laplace y considerando la fvm $\Lambda(t)$ del proceso. El método se desarrolla para probar $H_0: \Lambda(t)=\Lambda^*(t)$ vs $H_1: \Lambda(t)\neq\Lambda^*(t)$, para $\Lambda^*(t)$ especificada más adelante.

Los resultados de esta prueba muestran si la fvm $\Lambda^*(t)$ para el PPNH es la adecuada, o si se requiere un modelo diferente a $\Lambda^*(t)$.

Aquí se consideran dos modelos generales para la fvm, definidos a continuación:

$$\Lambda_1(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}, t \in [0, T] \text{ y } \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0 \text{ (modelo Weibull);} \tag{1}$$

$$\text{y } \Lambda_2(t) = \exp(\beta_2 t^{\alpha_2}) - 1, \Lambda_1(t) = \beta_1 t^{\alpha_1} \text{ y } \alpha_2 > 0, \beta_2 > 0 \text{ (modelo exponencial)} \tag{2}$$

Al proceso con fvm dado por $\Lambda_1(t)$, se le llama Proceso Ley Potencia (PLP), y ha sido discutido por Duane (1964), Bassin (1973) y Crow (1974). Este proceso fue llamado Proceso Weibull porque su intensidad puede

expresarse como $\lambda_1(t) = \frac{\alpha_1}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha_1-1}$, con $\theta = \beta_1^{\frac{1}{\alpha_1}}$, la cual resulta ser la expresión de la razón de falla de la distribución Weibull.

El proceso con fvm dado por $\Lambda_2(t)$, tiene como función de intensidad $\lambda_2(t) = \alpha_2 \beta_2 t^{\alpha_2-1} \exp(\beta_2 t^{\alpha_2})$, y con $\alpha_2=1$ se tiene el proceso dado por Cox (1955). Este proceso es un caso particular del propuesto por Vaquera *et*

$$f(T_1, T_2, \dots, T_n | n) = n! \left[\frac{\alpha\beta}{\exp(\beta T^\alpha) - 1} \right]^{n-1} \left[\frac{1}{\prod_{i=1}^n T_i} \right] \exp\left(\alpha \sum_{i=1}^n \log(T_i) + \beta \sum_{i=1}^n T_i^\alpha\right),$$

hence the ideas of Cox (1955) and Crow (1974) are not applicable for $\alpha>0$ y $\beta>0$. On the other hand, if the null hypothesis is rejected in Laplace's test, it is concluded that intensity is increasing. But this does not provide sufficient information on the type of intensity, since there is an infinity of increasing intensities.

Next, a statistical test is designed for a NHPP upon Laplace's assumptions, and considering the mvf $\Lambda(t)$ of the process. The method is developed to test $H_0: \Lambda(t)=\Lambda^*(t)$ vs $H_1: \Lambda(t)\neq\Lambda^*(t)$, for $\Lambda^*(t)$ specified below.

The results of this test indicate if the mvf $\Lambda^*(t)$ for the NHPP is the appropriate one, or if a model different from $\Lambda^*(t)$ is required.

Here two general models for mvf $\Lambda^*(t)$ are considered and defined:

$$\Lambda_1(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}, t \in [0, T] \text{ with } \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0; \tag{1}$$

(Weibull model);

$$\text{and } \Lambda_2(t) = \exp(\beta_2 t^{\alpha_2}) - 1, \Lambda_1(t) = \beta_1 t^{\alpha_1} \text{ with } \alpha_2 > 0, \beta_2 > 0 \text{ (exponential model)} \tag{2}$$

The process with mvf given by $\Lambda_1(t)$, is called the Power Law Process (PLP) and has been discussed by Duane (1964), Bassin (1973) and Crow (1974). The process was called Weibull Process because its intensity

can be expressed as $\lambda_1(t) = \frac{\alpha_1}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha_1-1}$, with $\theta = \beta_1^{\frac{1}{\alpha_1}}$,

which turns out to be the Weibull distribution failure ratio.

The process with mvf given by $\Lambda_2(t)$, has as its intensity function $\lambda_2(t) = \alpha_2 \beta_2 t^{\alpha_2-1} \exp(\beta_2 t^{\alpha_2})$, and with $\alpha_2=1$, we have the process given by Cox (1955).

This process is a specific case of that proposed by Vaquera *et al.* (1997), in which a NHPP with an intensity of $\lambda(t) = \mu \alpha t^{\alpha-1} \exp(\beta t^\alpha)$, $\mu, \alpha > 0$ and $-\infty < \beta < \infty$, is assumed in order to study trends in data on ozone.

MATERIALS AND METHODS

The test statistic

Given that $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < T$ are arrival times of n events of a NHPP with mvf $\Lambda(t)$, $t \in (0, T]$, then T_1, T_2, \dots, T_n are the order statistics

al. (1997), en donde se asume un PPNH con intensidad $\lambda(t) = \mu\alpha t^{\alpha-1} \exp(\beta t^\alpha)$, $\mu, \alpha > 0$ y $-\infty < \beta < \infty$, para estudiar tendencias en datos de ozono.

MATERIALES Y MÉTODOS

La estadística de prueba

Dado que $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < T$ son los tiempos de arribo de n eventos de un PPNH con fvm $\Lambda(t)$, $t \in (0, T]$, entonces T_1, T_2, \dots, T_n son las estadísticas de orden de una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución

$F(t) = \frac{\Lambda(t)}{\Lambda(T)}$, y $N_T = n$ es una realización de una variable

Poisson ($\Lambda(T)$). Definiendo a $\theta_T = \Lambda(T)$, la variable aleatoria $\Lambda(T_k) = \theta_T F(T_k)$ tiene la misma distribución que la k -ésima estadística de orden de una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución uniforme $(0, \theta_T)$. Es decir, $F(T_k) \sim \text{Beta}(k, n-k+1)$, y por lo tanto

$$E[\Lambda(T_k)] = \theta_T \frac{k}{n+1}.$$

Considérese el caso para el cual $\Lambda^*(t) = \Lambda_1(t)$. Una transformación logarítmica de (1), conduce a una forma lineal en $\log(t)$:

$$\log[\Lambda^*(t)] = \log(\beta_1) + \alpha_1 \log(t). \tag{3}$$

Así, bajo H_0 y dado que $N_T = n$, con tiempos de arribos T_1, T_2, \dots, T_n , de (3) resulta que:

$$\log[\Lambda(T_k)] = \log(\beta_1) + \alpha_1 \log(T_k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{4}$$

$\Lambda(T_k)$ es una variable no observable, pero su valor medio es un buen representante de su valor desconocido. Así, sustituyendo $\Lambda(T_k)$ por $E[\Lambda(T_k)]$ en (4), resulta:

$$\log\left[\frac{\theta_T k}{n+1}\right] = \log(\beta_1) + \alpha_1 \log(T_k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{5}$$

Haciendo $Y_k = \log\left[\frac{\theta_T k}{n+1}\right]$ y $X_k = \log(T_k)$, se tiene una ecuación lineal:

$$Y_k = b + aX_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

En forma similar se llega a la ecuación (6) cuando $\Lambda^*(t) = \Lambda_2(t)$, aplicando una doble transformación logarítmica a (2), y haciendo

$$Y_k = \log\left(\log\left[\frac{\theta_T k}{n+1} + 1\right]\right).$$

Las consideraciones para obtener (5) se fundamentan en una situación real, observando el número total de eventos N_T en $[0, T]$ y los tiempos de arribos T_k . En este contexto, el parámetro $\theta_T = \Lambda(T)$ representa el

of a random sample of size n of the distribution $F(t) = \frac{\Lambda(t)}{\Lambda(T)}$, and

$N_T = n$ is a realization of a Poisson ($\Lambda(T)$) variable. Defining $\theta_T = \Lambda(T)$, the random variable $\Lambda(T_k) = \theta_T F(T_k)$ has the same distribution as the k -th order statistic of a random sample of size n of the uniform distribution $(0, \theta_T)$. That is, $F(T_k) \sim \text{Beta}(k, n-k+1)$, and therefore

$$E[\Lambda(T_k)] = \theta_T \frac{k}{n+1}.$$

Consider the case in which $\Lambda^*(t) = \Lambda_1(t)$. A logarithmic transformation of (1) leads to a linear form in $\log(t)$:

$$\log[\Lambda^*(t)] = \log(\beta_1) + \alpha_1 \log(t). \tag{3}$$

Thus, under H_0 , and given that $N_T = n$, with arrival times T_1, T_2, \dots, T_n , of (3),

$$\log[\Lambda(T_k)] = \log(\beta_1) + \alpha_1 \log(T_k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{4}$$

$\Lambda(T_k)$ is a non-observable variable, but its mean value is a good estimator of its unknown value. Thus, by substituting $E[\Lambda(T_k)]$ for $\Lambda(T_k)$ in (4), we have

$$\log\left[\frac{\theta_T k}{n+1}\right] = \log(\beta_1) + \alpha_1 \log(T_k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{5}$$

Defining $Y_k = \log\left[\frac{\theta_T k}{n+1}\right]$ y $X_k = \log(T_k)$, we have a linear equation:

$$Y_k = b + aX_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

In a similar way, we obtain equation (6) when $\Lambda^*(t) = \Lambda_2(t)$, applying a double logarithmic transformation to (2) and defining

$$Y_k = \log\left(\log\left[\frac{\theta_T k}{n+1} + 1\right]\right).$$

The considerations for obtaining (5) are based on a real situation, observing the total number of events N_T in $[0, T]$ and the arrival times T_k . In this context, the parameter $\theta_T = \Lambda(T)$ represents the average number of events occurring up to time T , and can be estimated by $N_T = n$ (Boswell, 1966). From now on, we will refer to θ_T as $N_T = n$ indistinctly, assuming that the process has been observed within a fixed time interval $(0, T]$.

Thus, the model will be suitable if it satisfies relationship (5). Therefore, the veracity of hypothesis H_0 will be sustained by the degree of linear association between the variables X and Y of equation (6), evaluated by means of the estimator of moments of the correlation coefficient, defined as the sample correlation coefficient between observations X_k y Y_k .

número de eventos en promedio, ocurridos hasta el tiempo T , y puede estimarse por $N_T = n$ (Boswell, 1966). De aquí en adelante se hará referencia indistintamente a θ_T como $N_T = n$, suponiendo que el proceso se ha observado en un intervalo de tiempo fijo $(0, T]$.

Así, el modelo $\Lambda_1(t)$ será adecuado si se cumple la relación (5). Por lo tanto, la veracidad de la hipótesis H_0 estará sustentada por el grado de asociación lineal entre las variables X y Y de la ecuación (6), evaluada mediante el estimador de momentos del coeficiente de correlación, definido como el coeficiente de correlación muestral entre las observaciones X_k y Y_k .

$$r = \text{Corr}(X, Y) = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 \sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y})^2}}. \quad (7)$$

Note que bajo H_0 se espera una asociación lineal perfecta entre X y Y , y en consecuencia r será aproximadamente igual a la unidad; y por tanto la prueba rechaza H_0 cuando $r < c_{\alpha^*}$. Así, dado un nivel de significancia α^* , se tiene que

$$\alpha^* = P[\text{rechazar } H_0 | H_0] = P[r < c_{\alpha^*} | H_0] = F_i(c_{\alpha^*}), \quad \text{de donde}$$

$$c_{\alpha^*} = F_i^{-1}(\alpha^*) \quad \text{y } F_i \text{ es la función de distribución de } r \text{ bajo } \Lambda_i(t), i=1,2.$$

La propiedad más importante de la estadística r es su invarianza respecto a parámetros de localización y escala, la cual se sigue de la propiedad correspondiente del coeficiente de correlación momento producto. Por lo tanto, la distribución $F_i(r)$, $i=1,2$ no depende de los parámetros a y b de la ecuación (6), pero sí depende del tamaño de la muestra $N_T = n$, el número total de eventos ocurridos hasta el tiempo T .

La prueba del coeficiente de correlación fue propuesta por Filliben (1975), para probar la bondad de ajuste a la distribución normal; y sus tablas fueron generadas por Looney y Gullledge (1985). Kinnison (1989) presenta una tabla para la prueba de bondad de ajuste para la distribución de valores extremos tipo I (Gumbel), usando el método del coeficiente de correlación.

La obtención de la distribución de la estadística de prueba

La distribución de r bajo H_0 se obtiene por simulación. Para esto, considere la definición de un PPNH con fvm $\Lambda(t)$, $t \in [0, T]$, y $\theta_T = \Lambda(T)$; de aquí se tiene que $N_T \sim \text{Poisson}(\theta_T)$. Así, el comportamiento del proceso en $[0, T]$ depende de una realización, $N_T = n$, que a su vez depende en gran medida de θ_T , es decir de T y $\Lambda(t)$. Esto significa que la distribución de r en (7) depende fuertemente del valor de θ_T . Por lo tanto, es suficiente estudiar la distribución de r para un valor fijo de θ_T , haciendo que N_T tome valores de acuerdo con la distribución Poisson (θ_T). Es decir, el proceso se simula muchas veces en el intervalo de tiempo $[0, T]$ bajo $\Lambda(t)$, y esto permite obtener la distribución de r dado θ_T .

Los pasos para generar la distribución de r bajo $\Lambda_1(t)$, dado un valor fijo de θ_T y valores conocidos y fijos de α_1 y β_1 , se describen a continuación:

$$r = \text{Corr}(X, Y) = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 \sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y})^2}}. \quad (7)$$

Note that under H_0 , a perfect linear association is expected between X and Y , and consequently r will be approximately equal to one; and hence the test rejects H_0 when $r < c_{\alpha^*}$. Thus, given a level of significance $\alpha^* = P[\text{reject } H_0 | H_0] = P[r < c_{\alpha^*} | H_0] = F_i(c_{\alpha^*})$,

whence $c_{\alpha^*} = F_i^{-1}(\alpha^*)$ and F_i is the distribution function of r under $\Lambda_i(t)$, $i=1,2$.

The most important property of the statistic r is its invariance relative to the parameters of location and scale, which follows from the corresponding property of the moment product correlation coefficient. Therefore, the $F_i(r)$, $i=1,2$ distribution does not depend on the a and b parameters in equation (6), but it does depend on the size of the sample $N_T = n$, total number of events occurring up to time T .

Filliben (1975) proposed the test of the correlation coefficient to test goodness of fit to normal distribution. His tables were constructed by Looney and Gullledge (1985). Kinnison (1989) presents a table for the goodness of fit test for the distribution of Type I extreme values (Gumbel), using the method of the correlation coefficient.

Obtaining the distribution of the test statistic

The distribution of r under H_0 is obtained by simulation. To do this, consider the definition of a NHPP with mfv $\Lambda(t)$, $t \in [0, T]$, and $\theta_T = \Lambda(T)$; from this, we have it that $N_T \sim \text{Poisson}(\theta_T)$. Thus, the performance of the process in $[0, T]$ depends on a realization, $N_T = n$, which in turn depends largely on θ_T , that is, on T and $\Lambda(t)$. This means that the distribution of r in (7) greatly depends on the value of θ_T . Therefore, it is sufficient to study the distribution of r for a fixed value of θ_T , making N_T take values consistent with the Poisson (θ_T) distribution. That is to say, the process is often simulated within the time interval $[0, T]$ under $\Lambda(t)$, and this allows to obtain the distribution of r , given θ_T .

The steps to generate the distribution of r under $\Lambda_1(t)$, given a fixed value of θ_T and known and fixed values of α_1 and β_1 are described next:

1. Simulate a realization $N_T = n$, with $N_T \sim \text{Poisson}(\theta_T)$.

2. Simulate n arrival times T_1, T_2, \dots, T_n , with $T_k = \left[\frac{1}{\beta_1} (U_{(k)} \theta_T) \right]^{\alpha_1}$,

where $U_{(k)}$ is the k^{th} order statistic of a n -size sample of the uniform distribution $(0, 1)$ (Lewis and Shedler, 1976).

3. Calculate X_k and Y_k , and obtain r from (7).
4. Repeat the above steps until an m -size sample of r is obtained,

$$\{r_j\}_{j=1}^m.$$

1. Simular una realización $N_T = n$, con $N_T \sim \text{Poisson}(\theta_T)$.
2. Simular n tiempos de arribo T_1, T_2, \dots, T_n , con
$$T_k = \left[\frac{1}{\beta_1} (U_{(k)} \theta_T) \right]^{\alpha_1}$$
, donde $U_{(k)}$ es la k -ésima estadística de orden de una muestra de tamaño n de la distribución uniforme $(0,1)$. (Lewis y Shedler, 1976).
3. Calcular las X_k y Y_k , y obtener r de (7).
4. Repetir los pasos anteriores, hasta obtener una muestra de tamaño m de r , $\{r_j\}_{j=1}^m$.
5. Para m suficientemente grande, ordenar los valores de los r_j y asignar a c_{α^*, θ_T} el valor $r_{(j)}$ tal que $\alpha^* = \frac{j}{m}$ (Kinnison, 1989).

Para generar la distribución de r bajo $\Lambda_2(t)$, se siguen los pasos anteriores, con
$$T_k = \left[\frac{1}{\beta_2} \log(U_{(k)} \theta_T + 1) \right]^{\alpha_2}$$
.

Los Cuadros 1 y 2 contienen los valores críticos c_{α^*, θ_T} , para diferentes valores de θ_T y diferentes niveles de significancia α^* , con $m=50\ 000$ y cuatro dígitos para c_{α^*, θ_T} .

Estudio del tamaño de las pruebas

Para calcular, por simulación, el tamaño de la prueba con $\Lambda^*(t)=\Lambda_1(t)$, dado un valor fijo de θ_T y algunos valores fijos de α_1 y β_1 , se siguen los primeros cuatro pasos de la obtención de la distribución de r . Adicionalmente, para cada r_j simulada, se realiza la prueba de hipótesis con probabilidad máxima de error tipo I igual a α^* ; y se estima α^* como el cociente del número total de rechazos entre el número m de observaciones simuladas de r . El estudio con $\Lambda^*(t)=\Lambda_2(t)$, es similar.

Potencia de las pruebas

El estudio de la potencia de las pruebas para un valor fijo de θ_T y algunos valores fijos de α_1 y β_1 para el modelo de H_1 , se describe en los siguientes pasos:

1. Simular el número total de eventos $N_T = n$, $N_T \sim \text{Poisson}(\theta_T)$.
2. Simular los tiempos de arribos de los n eventos del proceso, con la inversa de la fvm dada por H_1 .
3. Calcular el valor de la estadística r , con base en la ecuación (7) y de acuerdo con la linealización del modelo dado por H_0 .
4. Repetir los pasos anteriores, hasta obtener una muestra de m observaciones de r , $\{r_j\}_{j=1}^m$.
5. Finalmente, para cada r_j simulada, se realiza la prueba de hipótesis con un tamaño α^* , fijado con anticipación; y estimar la
$$P[r < c_{\alpha^*} | H_1 = \delta^*]$$
 como el cociente del número total de rechazos entre el número m de observaciones simuladas de r .

5. For a large enough m , order the values of the r_j s, and assign to c_{α^*, θ_T} the value $r_{(j)}$, such that $\alpha^* = \frac{j}{m}$ = (Kinnison, 1989).

To generate the distribution of r under $\Lambda_2(t)$, the previous steps

are followed, with
$$T_k = \left[\frac{1}{\beta_2} \log(U_{(k)} \theta_T + 1) \right]^{\alpha_2}$$
.

Tables 1 and 2 contain the critical values of c_{α^*, θ_T} for the different values of θ_T and different levels of significance α^* , with $m=50\ 000$ and four digits for c_{α^*, θ_T} .

Study of test size

To calculate, by simulation, test size with $\Lambda^*(t)=\Lambda_1(t)$, given a fixed value of θ_T and some fixed values of α_1 and β_1 , the first four steps in obtaining the distribution of r are followed. In addition, for each simulated r_j , the test of hypotheses is performed with the maximum probability of type I error, equal to α^* ; and α^* is simulated as the ratio of the total number of rejections to m number of simulated observations of r . The study with $\Lambda^*(t)=\Lambda_2(t)$, is similar.

Tests power

The study of test power for a fixed value of θ_T and some fixed values of α_1 and β_1 for the H_1 model is described in the following steps:

1. Simulate the total number of events $N_T = n$, $N_T \sim \text{Poisson}(\theta_T)$.
2. Simulate the arrival times of the n events of the process with the inverse of the mvf given by H_1 .
3. Calculate the value of the r statistic, based on equation (7) and according to the linearization of the model given by H_0 .
4. Repeat the above steps, until a sample of m observations of r , $\{r_j\}_{j=1}^m$, is obtained.
5. Finally, for each simulated r_j , a test of hypothesis is performed with a size of α^* , previously fixed, and
$$P[r < c_{\alpha^*} | H_1 = \delta^*]$$
 is estimated as the ratio of the total number of rejections divided by the m number of simulated observations of r .

RESULTS AND DISCUSSION

Figure 1 shows the graphs of the r distribution function for the different values of θ_T under $\Lambda_1(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$, with fixed values of $\alpha_1=2.5$, $\beta_1=1.5$, and $m=20\ 000$. Figure 2 shows the graphs of the r distribution function for the different values of θ_T under $\Lambda_2(t) = \exp(\beta_2 t^{\alpha_2}) - 1$, with the fixed values of $\alpha_2=1.5$, $\beta_2=0.5$, and $m=20\ 000$. The graphs of Figure 1 show that, as θ_T increases, the

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la Figura 1 se muestran las gráficas de la función de distribución de r para diferentes valores de θ_T bajo $\Lambda_1(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$, con valores fijos de $\alpha_1=2.5$, $\beta_1=1.5$, y $m=20\ 000$. Por otra parte en la Figura 2 se muestran las gráficas de la función de distribución de r para diferentes valores de θ_T bajo $\Lambda_2(t) = \exp(\beta_2 t^{\alpha_2}) - 1$, con valores fijos de $\alpha_2=1.5$, $\beta_2=0.5$, y $m=20000$. Las gráficas de la Figura 1 muestran que conforme θ_T crece, la distribución de $r|\theta_T$ tiende a concentrarse cerca de uno, aumentando la región de rechazo de la prueba. En cambio, en las gráficas de la Figura 2 se observa que la distribución de $r|\theta_T$ tiende menos rápido a concentrarse cerca de uno conforme θ_T crece. Esta situación se refleja en los valores críticos c_{α^*, θ_T} presentados en los Cuadros 1 y 2, para las fvm $\Lambda_1(t)$ y $\Lambda_2(t)$.

Las estimaciones del tamaño de la prueba para los modelos $\Lambda_1(t)$ y $\Lambda_2(t)$ no se ven afectadas por el número promedio de eventos θ_T . Sin embargo, para el modelo $\Lambda_1(t)$ se observa que para tamaños de prueba $\alpha^*=0.025$ y $.05$, la frecuencia de la prueba en la que no se respeta este tamaño, tiende a crecer conforme θ_T aumenta, para los valores de $\theta_T \in \{30, 60, 90, 120\}$ estudiados (Cuadro 3). Aunque la prueba para $\Lambda_1(t)$ presenta esta propiedad, no hay suficiente evidencia para aceptarla. Se concluye que las pruebas tienen la misma capacidad de rechazar un modelo correcto, y ésta no depende del número total de eventos durante el tiempo T .

distribution of $r|\theta_T$ tends to concentrate around one, expanding the rejection region of the test. In contrast, in the graphs of Figure 2, it can be observed that the distribution of $r|\theta_T$ tends to concentrate close to one more slowly as θ_T increases. This situation is reflected in the critical values c_{α^*, θ_T} presented in Tables 1 and 2 for the mvf $\Lambda_1(t)$ y $\Lambda_2(t)$.

The estimations of test size for the models $\Lambda_1(t)$ and $\Lambda_2(t)$ are not affected by the average number of events θ_T . However, for model $\Lambda_1(t)$ it can be observed that for test sizes $\alpha^*=0.025$ and $.05$, the frequency of the test in which this size is not respected tends to increase as θ_T increases, for values $\theta_T \in \{30, 60, 90, 120\}$ studied (Table 3). Although the test for $\Lambda_1(t)$ has this property, there is not enough evidence to accept it. It is concluded that the tests have the same capacity to reject a correct model, capacity which does not depend on the total number of events during time T .

The results for the test power, assuming a NHPP with mvf $\Lambda_1(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$ in H_0 , versus a NHPP with $\Lambda_{1,A}(t) = \exp(3t^5) - 1$ in H_1 , are presented in Table 4. Table 5 presents the results for test power, assuming a NHPP with mvf $\Lambda_2(t) = \exp(\beta_2 t^{\alpha_2}) - 1$ in H_0 , versus a NHPP with mvf in the family $\Lambda_{2,A}(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$ in H_1 . In both cases, the estimations were done with different θ_T and a sample of 10 000 observations for r .

The estimations of power given in Table 4 show the large capacity of rejecting a NHPP with mvf $\Lambda_1(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$ when, in fact, we have a NHPP with mvf

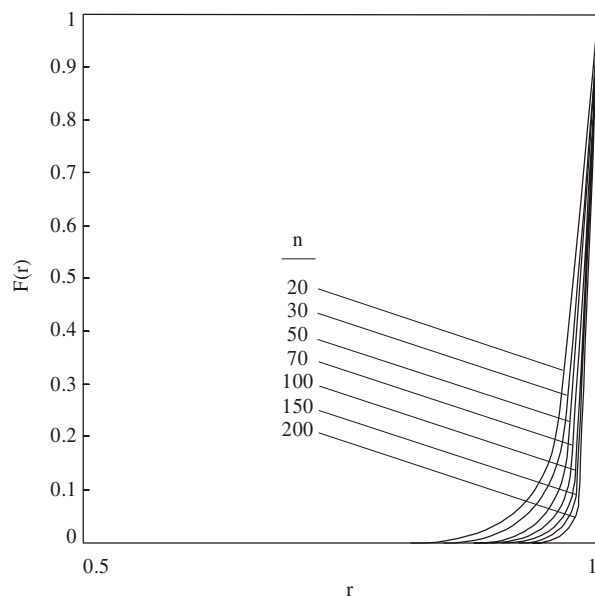


Figura 1. Distribución $r|\theta_T=n$, bajo $\Lambda_1(t)$.
Figure 1. $r|\theta_T=n$ distribution, under $\Lambda_1(t)$.

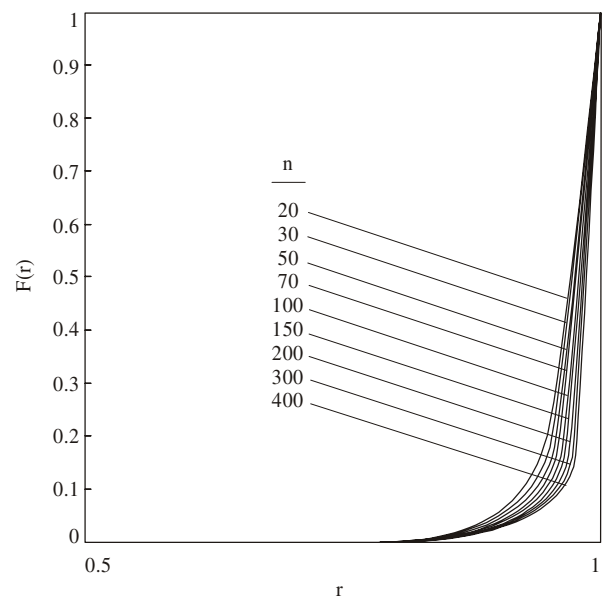


Figura 2. Distribución $r|\theta_T=n$, bajo $\Lambda_2(t)$.
Figure 2. $r|\theta_T=n$ distribution under $\Lambda_2(t)$.

Cuadro 1. Valores críticos para la prueba de bondad de ajuste para el PPNH bajo la fvm $\Lambda_1(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$, $t \in [0, T]$.
Table 1. Critical values for the goodness of fit test for the NHPP under the mvf $\Lambda_1(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$, $t \in [0, T]$.

$\theta_T \backslash \alpha^*$	0.010	0.025	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.50	0.75	0.95
15	0.8606	0.8889	0.9098	0.9309	0.9424	0.9501	0.9559	0.9736	0.9840	0.9922
20	0.8704	0.8991	0.9203	0.9398	0.9506	0.9575	0.9624	0.9774	0.9861	0.9930
25	0.8784	0.9063	0.9272	0.9455	0.9554	0.9619	0.9665	0.9799	0.9876	0.9937
30	0.8870	0.9132	0.9323	0.9503	0.9598	0.9657	0.9700	0.9821	0.9888	0.9941
40	0.8978	0.9231	0.9410	0.9575	0.9658	0.9710	0.9747	0.9849	0.9905	0.9949
50	0.9067	0.9300	0.9470	0.9623	0.9698	0.9745	0.9778	0.9868	0.9918	0.9955
60	0.9128	0.9365	0.9522	0.9658	0.9726	0.9769	0.9800	0.9882	0.9926	0.9960
70	0.9198	0.9414	0.9562	0.9688	0.9750	0.9791	0.9819	0.9893	0.9933	0.9963
80	0.9258	0.9457	0.9597	0.9712	0.9771	0.9807	0.9832	0.9901	0.9938	0.9966
90	0.9311	0.9493	0.9616	0.9731	0.9786	0.9820	0.9845	0.9909	0.9943	0.9968
100	0.9354	0.9526	0.9642	0.9747	0.9800	0.9833	0.9855	0.9915	0.9946	0.9970
120	0.9417	0.9573	0.9680	0.9776	0.9823	0.9852	0.9871	0.9925	0.9952	0.9973
150	0.9473	0.9629	0.9725	0.9804	0.9846	0.9871	0.9889	0.9934	0.9959	0.9977
200	0.9572	0.9688	0.9773	0.9840	0.9873	0.9894	0.9909	0.9946	0.9966	0.9981
300	0.9680	0.9768	0.9827	0.9880	0.9904	0.9920	0.9931	0.9959	0.9974	0.9985
400	0.9740	0.9810	0.9861	0.9902	0.9922	0.9935	0.9944	0.9967	0.9979	0.9988
500	0.9786	0.9841	0.9883	0.9917	0.9933	0.9941	0.9952	0.9972	0.9982	0.9990
700	0.9835	0.9879	0.9910	0.9936	0.9949	0.9957	0.9963	0.9978	0.9986	0.9992
1000	0.9874	0.9908	0.9931	0.9951	0.9961	0.9967	0.9971	0.9983	0.9989	0.9993

Cuadro 2. Valores críticos para la prueba de bondad de ajuste para el PPNH bajo la fvm $\Lambda_2(t) = \exp(\beta_2 t^{\alpha_2}) - 1$, $t \in [0, T]$.
Table 2. Critical values for the goodness of fit test for the NHPP under the mvf $\Lambda_2(t) = \exp(\beta_2 t^{\alpha_2}) - 1$, $t \in [0, T]$.

$\theta_T \backslash \alpha^*$	0.010	0.025	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.50	0.75	0.95
20	0.8464	0.8734	0.8971	0.9218	0.9355	0.9447	0.9517	0.9717	0.9835	0.9926
30	0.8434	0.8744	0.9015	0.9271	0.9413	0.9504	0.9571	0.9753	0.9857	0.9933
50	0.8421	0.8781	0.9064	0.9336	0.9477	0.9566	0.9629	0.9793	0.9879	0.9943
70	0.8450	0.8801	0.9079	0.9360	0.9506	0.9596	0.9658	0.9815	0.9894	0.9949
100	0.8496	0.8852	0.9129	0.9401	0.9544	0.9630	0.9690	0.9837	0.9906	0.9955
150	0.8512	0.8904	0.9186	0.9444	0.9585	0.9669	0.9724	0.9859	0.9920	0.9962
200	0.8589	0.8939	0.9211	0.9468	0.9601	0.9687	0.9743	0.9872	0.9928	0.9965
300	0.8691	0.9012	0.9274	0.9517	0.9645	0.9724	0.9775	0.9891	0.9940	0.9971
400	0.8739	0.9074	0.9329	0.9554	0.9677	0.9748	0.9795	0.9903	0.9946	0.9974
500	0.8809	0.9120	0.9355	0.9574	0.9687	0.9760	0.9807	0.9911	0.9951	0.9977
700	0.8890	0.9182	0.9416	0.9623	0.9727	0.9790	0.9832	0.9923	0.9958	0.9979
1000	0.8986	0.9277	0.9482	0.9666	0.9759	0.9815	0.9854	0.9934	0.9964	0.9983
1500	0.9120	0.9377	0.9551	0.9710	0.9794	0.9844	0.9876	0.9945	0.9971	0.9986
2000	0.9202	0.9438	0.9599	0.9744	0.9815	0.9861	0.9891	0.9953	0.9974	0.9988

Cuadro 3. Frecuencia de las pruebas en las que no se mantiene el tamaño.
Table 3. Test frequency in which size is not attained.

$\theta_T \backslash \alpha^*$	Bajo $\Lambda_1(t)$			Bajo $\Lambda_2(t)$			
	0.01	0.025	0.05	$\theta_T \backslash \alpha^*$	0.01	0.025	0.05
30	10/25	8/25	10/25	50	9/25	11/25	15/25
60	12/25	8/25	10/25	100	10/25	13/25	17/25
90	11/25	10/25	11/25	150	10/25	11/25	16/25
120	10/25	13/25	14/25	200	11/25	12/25	12/25

Los resultados para la potencia de la prueba, suponiendo un PPNH con fvm $\Lambda_1(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$ en H_0 , contra un PPNH con fvm $\Lambda_{1,A}(t) = \exp(3t^5) - 1$ en H_1 , se presentan en el Cuadro 4. En el Cuadro 5 se presentan los

$\Lambda_{1,A}(t) = \exp(3t^5) - 1$; power increases when θ_T increases, for different test sizes. On the other hand, the power estimations in Table 5 reflect little capacity of rejecting a NHPP with mvf $\Lambda_2(t) = \exp(\beta_2 t^{\alpha_2}) - 1$

resultados para la potencia de la prueba, suponiendo un PPNH con fvm $\Lambda_2(t) = \exp(\beta_2 t^{\alpha_2}) - 1$ en H_0 , contra un PPNH con fvm en la familia $\Lambda_{2,A}(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$ en H_1 . En ambos casos, las estimaciones se realizaron para diferentes θ_T , y una muestra de 10 000 observaciones para r .

Las estimaciones de la potencia dadas en el Cuadro 4 muestran la alta capacidad de rechazar un PPNH con fvm $\Lambda_1(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$, cuando de hecho se tiene un PPNH con fvm $\Lambda_{1,A}(t) = \exp(3t^5) - 1$; la potencia aumenta cuando

when, in fact, we have a NHPP with mvf $\Lambda_{2,A}(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$ for $\beta_1=3$ and $\alpha_1=2,1$, with $20 < \theta_T < 1000$. However, note that the capacity to reject $\Lambda_2(t)$ increases when θ_T increases, for different test sizes. For example, for $\theta_T > 1500$, the estimated power is $\hat{\delta} > 0.5$ for $\alpha \geq 0.15$ values.

Note that these results reflect only the performance of the test power based on r for the alternative models studied. Therefore these results are not conclusive, since there are infinite alternative models, as many as there are

Cuadro 4. Estudio de potencia.
Table 4. Study of power.

H ₀ : $\Lambda_1(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$ vs H ₁ : $\Lambda_{1,A}(t) = \exp(3t^5) - 1$							
$\theta_T \backslash \alpha^*$	0.010	0.025	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
15	0.0514	0.0974	0.1496	0.2259	0.2903	0.3472	0.4002
20	0.0723	0.1290	0.1913	0.2802	0.3479	0.4087	0.4590
25	0.0872	0.1457	0.2206	0.3154	0.3848	0.4443	0.5003
30	0.1121	0.1807	0.2503	0.3571	0.4337	0.4894	0.5435
40	0.1405	0.2268	0.3101	0.4217	0.4995	0.5519	0.6011
50	0.1655	0.2597	0.3545	0.4777	0.5526	0.6088	0.6578
60	0.1945	0.2967	0.3949	0.5143	0.5889	0.6422	0.6896
70	0.2309	0.3372	0.4402	0.5615	0.6319	0.6844	0.7231
80	0.2494	0.3547	0.4663	0.5772	0.6522	0.7005	0.7388
90	0.2823	0.4010	0.5010	0.6213	0.6914	0.7409	0.7779
100	0.3119	0.4263	0.5277	0.6393	0.7092	0.7607	0.7941
120	0.3418	0.4608	0.5641	0.6828	0.7486	0.7935	0.8245
150	0.3867	0.5256	0.6307	0.7338	0.7947	0.8357	0.8635
200	0.4720	0.5975	0.7068	0.8024	0.8251	0.8826	0.9077
300	0.6054	0.7161	0.8026	0.8823	0.9162	0.9402	0.9532
400	0.6851	0.7891	0.8677	0.9241	0.9505	0.9638	0.9734
500	0.7606	0.8442	0.9087	0.9517	0.9709	0.9794	0.9848
700	0.8457	0.9105	0.9505	0.9750	0.9847	0.9899	0.9926
1000	0.9173	0.9594	0.9809	0.9924	0.9960	0.9982	0.9989

Cuadro 5. Estudio de potencia.
Table 5. Study of power.

H ₀ : $\Lambda_2(t) = \exp(\beta_2 t^{\alpha_2}) - 1$ vs H ₁ : $\Lambda_{2,A}(t) = 3t^2$				H ₀ : $\Lambda_2(t) = \exp(\beta_2 t^{\alpha_2}) - 1$ vs H ₁ : $\Lambda_{2,A}(t) = 3t$			
$\theta_T \backslash \alpha^*$	0.15	0.20	0.25	$\theta_T \backslash \alpha^*$	0.15	0.20	0.25
20	0.1105	0.1608	0.2144	20	0.1145	0.1688	0.2238
30	0.1028	0.1605	0.2170	30	0.1021	0.1558	0.2145
50	0.0927	0.1549	0.2242	50	0.0901	0.1551	0.2215
70	0.0904	0.1650	0.2394	70	0.0866	0.1534	0.2235
100	0.1011	0.1876	0.2783	100	0.0979	0.1888	0.2746
150	0.1087	0.2141	0.3220	150	0.1148	0.2304	0.3380
200	0.1258	0.2565	0.3796	200	0.1163	0.2507	0.3730
300	0.1656	0.3354	0.4914	300	0.1578	0.3267	0.4854
400	0.2064	0.4124	0.5832	400	0.2098	0.4096	0.5699
500	0.2271	0.4619	0.6457	500	0.2335	0.4624	0.6479
700	0.3469	0.5995	0.7711	700	0.3407	0.5979	0.7588
1000	0.4756	0.7381	0.8807	1000	0.4763	0.7382	0.8797
1500	0.6579	0.8844	0.9586	1500	0.6528	0.8773	0.9571
2000	0.7743	0.9414	0.9853	2000	0.7657	0.9385	0.9844

θ_T aumenta, para diferentes tamaños de la prueba. Por otro lado, las estimaciones de la potencia en el Cuadro 5 reflejan poca capacidad para rechazar un PPNH con fvm $\Lambda_2(t) = \exp(\beta_2 t^{\alpha_2}) - 1$, cuando de hecho se tienen PPNH con fvm $\Lambda_{2,A}(t) = \beta_1 t^{\alpha_1}$ para $\beta_1=3$ y $\alpha_1=2, 1$, con $20 < \theta_T < 1000$. Sin embargo, note que la capacidad de rechazar $\Lambda_2(t)$ aumenta cuando θ_T aumenta, para diferentes tamaños de la prueba. Por ejemplo, para $\theta_T > 1500$ la potencia estimada es $\hat{\delta} > 0.5$ para valores de $\alpha^* \geq 0.15$.

Nótese que estos resultados sólo reflejan el comportamiento de la potencia de la prueba basada en r , para los modelos alternativos estudiados; por lo que estos resultados no son concluyentes, ya que existen una infinidad de modelos alternativos, tantos como elementos tiene el conjunto $\Theta = \{(\alpha_1, \beta_1) : \alpha_1 > 0 \text{ y } \beta_1 > 0\}$. Sin embargo, estos resultados son consistentes con la realidad, por el hecho que conforme se tiene más ocurrencias de eventos, se tiene más información del proceso y, por lo tanto, mayor potencia para rechazar un modelo incorrecto.

CONCLUSIONES

Se presentan dos pruebas no paramétricas para las hipótesis compuestas $H_0: \Lambda(t) = \Lambda^*(t)$ cuando $\Lambda^*(t)$ es un modelo potencia ($\Lambda_1(t)$) y un modelo exponencial ($\Lambda_2(t)$).

Las propiedades de invarianza del coeficiente de correlación como estadística de prueba, permiten establecer la prueba sin estimar los parámetros involucrados en $\Lambda^*(t)$ en cada caso. Las familias de modelos $\Lambda^*(t)$ consideradas incluyen el proceso Poisson Homogéneo, el proceso Weibull y el proceso con tendencia exponencial.

La potencia de cada una de las pruebas para H_0 con $\Lambda^*(t)$ como uno de los modelos y H_1 con $\Lambda^*(t)$ como el otro modelo (Cuadros 4 y 5), aumenta conforme θ_T aumenta. Estas pruebas se recomiendan para realizar un análisis inicial cuando no se tiene ningún conocimiento previo de un posible modelo para $\Lambda(t)$. Si H_0 no es rechazada, entonces se sugiere realizar una prueba paramétrica UMP de una hipótesis conteniendo una subfamilia de la familia no rechazada.

LITERATURA CITADA

- Bassin, W. M. 1973. A Bayesian optimal overhaul model for the Weibull restoration process. *J. Am. Stat. Assoc.* 68: 575-578.
 Boswell, M. T. 1966. Estimating and testing trend in a stochastic process of Poisson type. *Ann. Math. Stat.* 37: 1564-1573.

elements in the set $\Theta = \{(\alpha_1, \beta_1) : \alpha_1 > 0 \text{ y } \beta_1 > 0\}$. However, these results are consistent with reality, since, as the occurrence of events increase, there is more information of the process and, therefore, greater power for rejecting an incorrect model is attained.

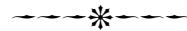
CONCLUSIONS

Two non-parametric tests are presented for the compound hypotheses $H_0: \Lambda(t) = \Lambda^*(t)$ when $\Lambda^*(t)$ is a power model ($\Lambda_1(t)$) and an exponential model ($\Lambda_2(t)$).

The properties of invariance of the correlation coefficient as the test statistic, permit establishing the test without estimating the parameters involved in $\Lambda^*(t)$ in each case. The families of the models $\Lambda^*(t)$ considered here include the Homogeneous Poisson Process, the Weibull process, and the process with exponential tendency.

The power of each of the tests for H_0 with $\Lambda^*(t)$ as one of the models and H_1 with $\Lambda^*(t)$ as the other (Tables 4 and 5), increases as θ_T increases. These tests are recommended for initial analysis when there is no previous knowledge of a possible model for $\Lambda(t)$. If H_0 is not rejected, then a UMP parametric test is suggested for a hypothesis containing a subfamily of the non-rejected family.

—End of the English version—



- Cox, D. R. 1955. Some statistical methods connected with series of events. *JRSS. Ser. B.* 17: 2, 129-164.
 Crow, L. H. 1974. Reliability analysis for complex repairable systems. *In: Reliability and Biometry-Statistical Analysis of Lifelength*, SIAM, Philadelphia. 379-410.
 Duane, J. T. 1964. Learning curve approach to reliability monitoring. *IEEE, Transactions on Aerospace, AS-2:* 563-566.
 Filliben, J.J. 1975. The probability plot correlation coefficient test for normality. *Technometrics.* 17: 1, 111-117.
 Kinnison, R. 1989. Correlation coefficient goodness-of-fit test for the extreme-value distribution. *J. Am. Stat. Assoc.* 43: 2, 98-100.
 Lewis, P. A. W. and Shedler, G. S. 1976. Simulation of nonhomogeneous Poisson processes with log linear rate function. *Biometrika.* 63: 501-505.
 Lehmann, E. L. 1959. *Testing Statistical Hypotheses*, New York, John Wiley. p. 136.
 Looney, S. W. and T. R. Gullledge. 1985. Use of the correlation coefficient with normal probability plots. *J. Am. Stat. Assoc.* 39: 75-79.
 Vaquera, H.; J. A. Villaseñor, and J. Hughes. 1997. Statistical analysis of trends in urban ozone. *Statistics. Environment,* 3: 175-184.